C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 437–442

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Problèmes mathématiques de la mécanique

# Analyse asymptotique de milieux élastiques stratifiés dans les espaces de fonctions à déformation bornée

## *Asymptotic analysis of stratified elastic media in the space of functions with bounded deformation*

Michel Bellieud [a], Shane Cooper [b]

[a] *Université Montpellier-2, Case courier 048, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France*
[b] *Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath, BA2 7AY, UK*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 17 août 2015
Accepté après révision le 7 janvier 2016
Disponible sur Internet le 11 février 2016

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Nous analysons le comportement asymptotique des solutions de problèmes du type

$$(\mathcal{P}_\varepsilon):\begin{cases}-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon))=\boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega=(0,L)\times\Omega',\\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)=\lambda_\varepsilon(x_1)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon))I+2\mu_\varepsilon(x_1)\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon),\\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)=\dfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon+\nabla^T\boldsymbol{u}_\varepsilon),\\ \boldsymbol{u}_\varepsilon\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3),\quad \boldsymbol{f}\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3),\end{cases}\tag{1}$$

lorsque les coefficients de Lamé dépendent uniquement de la variable $x_1$, sont bornés dans $L^1(\Omega)$ et que $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$ est borné dans $L^1(\Omega)$. Nous déterminons le problème limite sous les hypothèses :

$$\begin{gathered}\mu_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} m,\qquad \frac{1}{\mu_\varepsilon}\overset{\star}{\rightharpoonup}\nu \quad \text{faiblement* dans } \mathcal{M}([0,L]),\quad \lambda_\varepsilon=l\mu_\varepsilon\ (l\geq 0),\\ m(\{t\})\nu(\{t\})=0\ \forall t\in[0,L],\quad m(\{0\})=m(\{L\})=\nu(\{0\})=\nu(\{L\})=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Notre travail s'applique aussi à l'équation de la chaleur, étendant au cas anisotrope les résultats obtenus par G. Bouchitté et C. Picard (Appl. Anal. 61 (1996) 307–341).


ABSTRACT

We analyse the asymptotic behaviour of solutions to problems of the type (1) in the case where the Lamé coefficients only depend on the variable $x_1$, are bounded in $L^1(0,L)$, and $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$ is bounded in $L^1(0,L)$. We determine the limit problem under the assumptions (2). Our

*Adresses e-mail :* michel.bellieud@univ-montp2.fr (M. Bellieud), S.A.L.Cooper@bath.ac.uk (S. Cooper).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.01.004
1631-073X/

method applies as well to the heat equation, extending to the general anisotropic setting the results of G. Bouchitté and C. Picard (Appl. Anal. 61 (1996) 307–341).



## Abridged English version

Let $\Omega := (0, L) \times \Omega'$ be a bounded cylindrical domain of $\mathbb{R}^3$. We are interested in the asymptotic analysis of the behaviour of the solution $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ to the elasticity problem (1) when the Lamé coefficients $\lambda_\varepsilon$, $\mu_\varepsilon$ only depend on one variable ($x_1$), are bounded in $L^1(0, L)$, and satisfy the weak* convergences in the sense of the measures stated in (2). Our analysis does not cover the case of independent Lamé coefficients. G. Bouchitté and C. Picard have established in [2], under the assumption (2), the weak* convergence in the space $BV(\Omega)$ (functions with bounded variations on $\Omega$) of the solution in $H^1_0(\Omega)$ to the equation $-\mathrm{div}\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f$ to the solution to (the main result of [2] concerns a more general nonlinear convex problem with mixed boundary conditions)

$$\min_{BV_0^{\nu,m}(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega \left|D_{\nu\otimes\mathcal{L}^2} D_{x_1} u\right|^2 \mathrm{d}\nu\otimes\mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{\alpha=2}^3 \left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2 \mathrm{d}m\otimes\mathcal{L}^2 - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x,$$

$$BV_0^{\nu,m}(\Omega) := \left\{ \varphi \in BV(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \boldsymbol{D}\varphi \ll \nu\otimes\mathcal{L}^2,\ \boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{D}\varphi \in L^2_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ \varphi^\star \in L^2_m(0, L; H^1_0(\Omega')), \quad \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right\}, \tag{3}$$

where $\varphi^\star$ is the precise representative of $\varphi$ (equal at $x$ to the limit of the averaged value of $\varphi$ on balls centred at $x$, whose radius tends to 0 if this limit exists, to 0 otherwise, see [3, p. 46]) and $\boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{D}\varphi$ denotes the Radon–Nikodym derivative of the vector measure $\boldsymbol{D}\varphi$ (gradient of $\varphi$ in the sense of distributions) with respect to $\nu\otimes\mathcal{L}^2$. We extend their result to the case of elasticity by appropriately developing their analysis in the setting of functions with bounded deformation. We prove that the limit problem associated with (1) is

$$(\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}) := \min_{\boldsymbol{u}\in BD_0^{\nu,m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{4}$$

The space $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ is defined by

$$BD_0^{\nu,m}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in BD(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \boldsymbol{E\varphi} \ll \nu\otimes\mathcal{L}^2,\ \boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{E\varphi} \in L^2_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ \varphi^\star_\alpha \in L^2_m(0, L; H^1_0(\Omega')) \quad \alpha\in\{2,3\}, \quad \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right\}, \tag{5}$$

where $BD(\Omega)$ is the space of functions with bounded deformation (set of the elements $\boldsymbol{\varphi}$ of $L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ whose symmetrized gradient in the sense of distributions $\boldsymbol{E\varphi}$ is a vector measure, see [5]). We show that the mapping defined on $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ by

$$\|\boldsymbol{v}\|_{BD_0^{\nu,m}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}|^2 \,\mathrm{d}\nu\otimes\mathcal{L}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 \,\mathrm{d}m\otimes\mathcal{L}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

where $\boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{v}) := \sum_{\alpha,\beta=2}^3 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\boldsymbol{e}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_\beta$, is a norm which turns $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ into a Hilbert space. Setting $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v}) = D_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}$, the mapping $a(.,.)$ is the continuous symmetric bilinear form on $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ given by

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) := &\int_\Omega \frac{1}{l+2}\left| l\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v})) + 2\Xi_{11}(\boldsymbol{v})\right|^2 \mathrm{d}\nu\otimes\mathcal{L}^2 + 4\sum_{\alpha=2}^3\int_\Omega |\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{v})|^2 \mathrm{d}\nu\otimes\mathcal{L}^2 \\ &+ 4\int_\Omega |e_{23}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 + \tfrac{4(l+1)}{l+2}\left(|e_{22}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 + |e_{33}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 + \tfrac{l}{l+1} e_{22}(\boldsymbol{v}^\star) e_{33}(\boldsymbol{v}^\star)\right) \mathrm{d}m\otimes\mathcal{L}^2. \end{aligned}$$

We prove that $a$ is coercive on $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$.

**Theorem 0.1.** *The space $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ endowed with the norm (6) is a Hilbert space. The bilinear form a is continuous and coercive on $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$. Under the assumption (2), the solution $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ to (1) weakly* converges in $BD(\Omega)$ to the unique solution $\boldsymbol{u}$ of (4).*

**Case of the anisotropic heat equation.** Our method applies to the study of anisotropic linear scalar diffusion problems of the type (8), where $\boldsymbol{A}$ is a symmetric positive definite $3 \times 3$ matrix satisfying $A_{11} \neq 0$. The limit problem takes the form (9) where $BV_0^{\nu,m}(\Omega)$ is the Hilbert space defined by (3), (10), with $\boldsymbol{\nabla}_{x'} v := \left(0, \ \frac{\partial v}{\partial x_2}, \ \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^T$. Setting $\boldsymbol{\xi}(\varphi) := \boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{D}\varphi$, the map $a(.,.)$ is the coercive continuous bilinear form on $BV_0^{\nu,m}(\Omega)$ given by (11).

**Theorem 0.2.** *Under the assumption (2), the sequence of solutions to (8) weakly* converges in $BV(\Omega)$ to the unique solution of the problem (9).*

## 1. Introduction et énoncé du résultat

Soit $\Omega := (0, L) \times \Omega'$ un domaine borné cylindrique de $\mathbb{R}^3$. Nous nous intéressons à l'analyse asymptotique du problème d'élasticité (1) lorsque les coefficients de Lamé $\lambda_\varepsilon$, $\mu_\varepsilon$ dépendent d'une seule variable ($x_1$), sont bornés dans $L^1(0, L)$, et satisfont les convergences étoile faible au sens des mesures (2). Notre analyse ne couvre pas le cas de coefficients de Lamé indépendants. G. Bouchitté and C. Picard ont établi dans [2], sous l'hypothèse (2), la convergence faible étoile dans l'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée sur $\Omega$, de la solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème $-\mathrm{div}\mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f$ vers la solution du problème (3) (le résultat principal de [2] concerne un problème plus général, convexe non linéaire, avec des conditions aux limites mixtes), où $\varphi^\star$ désigne le représentant précis de $\varphi$ (égal en $x$ à la limite de moyennes de $\varphi$ sur des boules centrées en $x$ dont le rayon tend vers 0 si cette limite existe, à 0 sinon, voir [3, p. 46]), et $\boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{D}\varphi$ désigne la dérivée de Radon–Nikodym de la mesure vectorielle $\boldsymbol{D}\varphi$ (gradient de $\varphi$ au sens des distributions) par rapport à $\nu \otimes \mathcal{L}^2$. Nous étendons ce résultat au cas de l'élasticité non linéaire en développant leur analyse dans le cadre des fonctions à déformation bornée. Nous montrons que le problème effectif associé à (1) s'écrit

$$(\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}) := \min_{\boldsymbol{u}\in BD_0^{\nu,m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}. \tag{7}$$

L'espace $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ est défini par (5), où $BD(\Omega)$ est l'espace des fonctions à déformation bornée (éléments $\boldsymbol{\varphi}$ de $L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ dont le gradient symétrisé au sens des distributions $\boldsymbol{E\varphi}$ est une mesure vectorielle, voir [5]). Nous prouvons que la norme définie sur $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ par (6) où $\boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{v}) := \sum_{\alpha,\beta=2}^3 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\beta$, confère à $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ une structure d'espace de Hilbert. Posant $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{E v}$, la forme $a(.,.)$ est la forme bilinéaire symétrique continue sur $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ donnée par

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) := &\int_\Omega \frac{1}{l+2}\left| l\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{v})) + 2\Xi_{11}(\boldsymbol{v})\right|^2 \mathrm{d}\nu \otimes \mathcal{L}^2 + 4\sum_{\alpha=2}^3 \int_\Omega |\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{v})|^2 \mathrm{d}\nu \otimes \mathcal{L}^2 \\ &+ 4\int_\Omega |e_{23}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 + \tfrac{4(l+1)}{l+2}\Big(|e_{22}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 + |e_{33}(\boldsymbol{v}^\star)|^2 + \tfrac{l}{l+1} e_{22}(\boldsymbol{v}^\star) e_{33}(\boldsymbol{v}^\star)\Big) \mathrm{d}m \otimes \mathcal{L}^2. \end{aligned}$$

Nous montrons que $a$ est coercive sur $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$.

**Théorème 1.1.** *L'espace $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ défini par (5), muni de la norme (6) est un espace de Hilbert. La forme bilinéaire a est continue et coercive sur $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$. Sous l'hypothèse (2), la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ des solutions de (1) converge etoile faiblement dans $BD(\Omega)$ vers l'unique solution $\boldsymbol{u}$ du problème (7).*

**Exemple.** Supposons que $\mu_\varepsilon$ soit donnée par

$$\mu_\varepsilon = \mu \mathbb{1}_{(0,L)\setminus\left(\frac{L}{2}-\varepsilon, \frac{L}{2}+\varepsilon\right)} + 2\varepsilon \mathbb{1}_{\left(\frac{L}{2}-\varepsilon, \frac{L}{2}+\varepsilon\right)}.$$

On obtient alors $\nu = \frac{1}{\mu}\mathcal{L}^1 + \delta_{\frac{L}{2}}$, $m = \mu\mathcal{L}^1$, et, posant $\Sigma := \{L/2\} \times \Omega'$, $\Omega^- := (0, L/2) \times \Omega'$, $\Omega^+ := (L/2, L) \times \Omega'$, on trouve $BD_0^{\nu,m}(\Omega) = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega \setminus \Sigma), \ \boldsymbol{\varphi} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega\right\}$. De plus, $\boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{E u} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Sigma} + (\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-) \odot \boldsymbol{e}_1 \mathcal{H}^2_{\lfloor\Sigma}$, où $\boldsymbol{u}^-$ (resp. $\boldsymbol{u}^+$) désigne la trace de $\boldsymbol{u}$ à gauche (resp. droite) de $\Sigma$ et $\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b} := 1/2(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a})$. Notant $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) := \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$, la forme $a$ s'écrit :

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega\setminus\Sigma} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi})\mathrm{d}x + \int_\Sigma (l+2)(u_1^+ - u_1^-)(\varphi_1^+ - \varphi_1^-) + \sum_{\alpha=2}^3 (u_\alpha^+ - u_\alpha^-)(\varphi_\alpha^+ - \varphi_\alpha^-)\mathrm{d}\mathcal{H}^2.$$

Le problème (7) est alors équivalent à

$$(\mathcal{P}^{eff}):\begin{cases} -\,\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega\setminus\Sigma, \quad \boldsymbol{u}\in H^1(\Omega\setminus\Sigma;\mathbb{R}^3),\ \boldsymbol{u}=0 \text{ on } \partial\Omega,\\ (l+2)(u_1^+-u_1^-)=\sigma_{11}(\boldsymbol{u}_{\lfloor\Omega^-})=\sigma_{11}(\boldsymbol{u}_{\lfloor\Omega^+}) \quad \text{sur } \Sigma,\\ u_\alpha^+-u_\alpha^-=\sigma_{1\alpha}(\boldsymbol{u}_{\lfloor\Omega^-})=\sigma_{1\alpha}(\boldsymbol{u}_{\lfloor\Omega^+}) \quad \text{sur } \Sigma \text{ pour } \alpha\in\{2,3\}.\end{cases}$$

**Cas de l'équation de la chaleur anisotrope.** Nos résultats s'étendent à l'étude de problèmes du type

$$(\mathcal{P}_\varepsilon):\ -\mathbf{div}(\mu_\varepsilon \boldsymbol{A}\nabla u_\varepsilon)=f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u_\varepsilon\in H_0^1(\Omega), \quad f\in L^\infty(\Omega), \tag{8}$$

lorsque $\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique définie positive vérifiant $A_{11}\neq 0$. Le problème limite s'écrit

$$(\mathcal{P}^{\text{eff}}):=\min_{u\in BV_0^{\nu,m}(\Omega)}\frac{1}{2}a(u,u)-\int_\Omega fu, \tag{9}$$

où $BV_0^{\nu,m}(\Omega)$ est l'espace de Hilbert défini par (3) associé à la norme

$$||v||_{BV_0^{\nu,m}(\Omega)}:=\left(\int_\Omega |\boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{D}v|^2\,\mathrm{d}\nu\otimes\mathcal{L}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\Omega |\nabla_{x'}(v^\star)|^2\mathrm{d}m\otimes\mathcal{L}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

où $\nabla_{x'}v:=\left(0,\ \frac{\partial v}{\partial x_2},\ \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^T$. Posant $\boldsymbol{\xi}(\varphi):=\boldsymbol{D}_{\nu\otimes\mathcal{L}^2}\boldsymbol{D}\varphi$, l'application $a(.,.)$ est la forme bilinéaire continue et coercive sur $BV_0^{\nu,m}(\Omega)$ donnée par

$$a(v,w):=\int_\Omega A_{11}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(v))_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(w))_1\mathrm{d}\nu\otimes\mathcal{L}^2-\int_\Omega A_{11}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\nabla_{x'}v^\star\right)_1\left(\boldsymbol{A}\nabla_{x'}w^\star\right)_1+\boldsymbol{A}\nabla_{x'}v^\star\cdot\nabla_{x'}w^\star\mathrm{d}m\otimes\mathcal{L}^2. \tag{11}$$

**Théorème 1.2.** *Sous l'hypothèse (2), la suite $(u_\varepsilon)$ des solutions de (8) converge étoile-faiblement dans $BV(\Omega)$ vers l'unique solution $u$ du problème (9).*

## 2. Résumé de la preuve

La démonstration repose sur la construction d'une suite $(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)$ de champs tests. Elle est déduite d'une famille de suite $((\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^k)_\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$ définies à partir de sous-ensembles finis $A_k$ de $[0,L]$ satisfaisant

$$\begin{cases} A_k=\left\{t_0^k,\,t_1^k,\ldots,t_{n_k}^k\right\}, \quad A_k\subset A_{k+1} \quad \forall k\in\mathbb{N},\\ 0=t_0^k<t_1^k<t_2^k<\ldots<t_{n_k-1}^k<t_{n_k}^k=L,\\ \nu\left(\left\{t_j^k\right\}\right)=m\left(\left\{t_j^k\right\}\right)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}, \quad \forall j\in\{0,\ldots,n_k\},\\ \lim\limits_{k\to+\infty}\ \sup\limits_{j\in\{1,\ldots,n_k\}}\left|t_j^k-t_{j-1}^k\right|=0.\end{cases} \tag{12}$$

Posant $I_j^k:=\left(t_{j-1}^k,t_j^k\right]$, notant $j_{x_1}$ l'entier tel que $x_1\in I_{j_{x_1}}^k$, on définit $\phi_\varepsilon^k(x_1):=\frac{\nu_\varepsilon((t_{j_{x_1}-1}^k,x_1))}{\nu_\varepsilon(I_{j_{x_1}}^k)}$. On fixe $\boldsymbol{v}\in BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ arbitraire (prolongé à $\mathbb{R}^3$ par 0), $\delta>0$ et on introduit sa régularisée partielle

$$\boldsymbol{v}^\delta(x):=\boldsymbol{v}(x_1,.)\star\rho_\delta,$$

où $(\rho_\delta)$ est une suite régularisante dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Pour alléger les notations, on pose $\boldsymbol{\varphi}:=\boldsymbol{v}^\delta$. Le champ test est l'élément de $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ donné en fonction de $\boldsymbol{\varphi}$ par

$$\varphi_{\varepsilon 1}^k(x):=\frac{1}{l+2}\left(\int_{I_{j_{x_1}}^k} l\mathrm{tr}\big(\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\varphi})\big)(s_1,x')+2\Xi_{11}(\boldsymbol{\varphi})(s_1,x')\,\mathrm{d}\nu(s_1)\right)\phi_\varepsilon^k(x_1)$$
$$-\frac{l}{l+2}\sum_{\alpha=2}^3\int_{t_{j_{x_1}-1}^k}^{x_1}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\alpha}(s_1,x')\,\mathrm{d}s_1+\varphi_1^+(t_{j_{x_1}-1}^k,x'),$$

$$
\varphi^k_{\varepsilon\alpha}(x) := \left( \int_{I^k_{j_{x_1}}} 2\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{\varphi})(s_1, x')\, \mathrm{d}\nu(s_1) \right) \phi^k_\varepsilon(x_1)
- \int_{t^k_{j_{x_1}-1}}^{x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\alpha}(s_1, x')\, \mathrm{d}s_1 + \varphi^+_\alpha(t^k_{j_{x_1}-1}, x'), \quad \forall \alpha \in \{2,3\}, \tag{13}
$$

où $\boldsymbol{\varphi}^+(x_1, x')$ désigne la trace de $\boldsymbol{\varphi}$ à droite de $\{x_1\} \times \Omega'$. Étant donnée une suite de mesures $(\theta_\varepsilon)$ convergeant *faiblement vers $\theta$, on dit qu'une suite de fonction $f_\varepsilon$ converge faiblement vers $f$ suivant le couple $(\theta_\varepsilon, \theta)$ (notation $f_\varepsilon \overset{\theta_\varepsilon,\theta}{\rightharpoonup} f$) si $f \in L^2_\theta$, $\sup_\varepsilon \int |f_\varepsilon|^2 \mathrm{d}\theta_\varepsilon < +\infty$, et $f_\varepsilon \theta_\varepsilon$ converge *faiblement vers $f\theta$. Elle converge fortement (notation $f_\varepsilon \overset{\theta_\varepsilon,\theta}{\to} f$) si de plus $\lim_{\varepsilon\to 0} \int |f_\varepsilon|^2 \mathrm{d}\theta_\varepsilon = \int |f|^2 \mathrm{d}\theta$. On sait (voir [1,4,6]) que toute suite $(f_\varepsilon)$ vérifiant $\sup_\varepsilon \int |f_\varepsilon|^2 \mathrm{d}\theta_\varepsilon$ admet une sous-suite convergeant faiblement suivant le couple $(\theta_\varepsilon, \theta)$, et que si $f_\varepsilon$ (resp. $g_\varepsilon$) converge faiblement (resp. fortement) vers $f$ (resp. $g$) suivant $(\theta_\varepsilon, \theta)$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon g_\varepsilon \mathrm{d}\theta_\varepsilon = \int f g\, \mathrm{d}\theta$. Par un argument de diagonalisation, on montre l'existence d'une suite $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon (= \boldsymbol{\varphi}^{k_\varepsilon}_\varepsilon)$ vérifiant

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}|\, \mathrm{d}x = 0, \\
&\sigma_{\varepsilon 11}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} \big(l \operatorname{tr}\big(\Xi(\boldsymbol{\varphi})\big) + 2\Xi_{11}(\boldsymbol{\varphi})\big), \\
&\sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} 2\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{\varphi}) \qquad \forall \alpha \in \{2,3\}, \\
&\boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{\varphi}^\star).
\end{aligned} \tag{14}
$$

On prouve que la suite $(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ des solutions de (1) est bornée dans $BD(\Omega)$ et satisfait

$$
\sup_{\varepsilon>0} \int_\Omega |\boldsymbol{u}'_\varepsilon|^2 \mathrm{d}m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2 + \int_\Omega |\boldsymbol{u}_\varepsilon|\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \mu_\varepsilon\, |\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)|^2\, \mathrm{d}x < \infty.
$$

On déduit, à une suite extraite près, les convergences suivantes pour un certain champ $\boldsymbol{u} \in BD^{\nu,m}_0(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}|\, dx = 0, \quad \sigma_{\varepsilon 11}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \xrightharpoonup{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} l \operatorname{tr}\big(\Xi(\boldsymbol{u})\big) + 2\Xi_{11}(\boldsymbol{u}), \\
&\sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \xrightharpoonup{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} 2\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{u}) \qquad \forall \alpha \in \{2,3\}, \quad \boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \xrightharpoonup{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \boldsymbol{e}_{x'}(\boldsymbol{u}^\star).
\end{aligned} \tag{15}
$$

On multiplie (1) par $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ et on intègre par parties. Après une manipulation élémentaire des termes, il vient :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\, \mathrm{d}x = {}& \int_\Omega \Big( \tfrac{1}{l+2} \sigma_{\varepsilon 11}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \sigma_{\varepsilon 11}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + \sum_{\alpha=2}^3 \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \Big) \mathrm{d}\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2 \\
&+ \int_\Omega \tfrac{4(l+1)}{l+2} \sum_{\alpha=2}^3 e_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) e_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + 4 e_{23}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) e_{23}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + \tfrac{2l}{l+1} \Big( e_{22}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) e_{33}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + e_{33}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) e_{22}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \Big) \mathrm{d}m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2.
\end{aligned} \tag{16}
$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, compte tenu de (14) et (15), on obtient :

$$
a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}x.
$$

Comme $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}^\delta$ converge fortement vers $\boldsymbol{v}$ dans $BD^{\nu,m}(\Omega)$ (espace déduit de $BD^{\nu,m}_0(\Omega)$ en supprimant les conditions aux limites sur $\partial\Omega$) quand $\delta \to 0$, on déduit que $\boldsymbol{u}$ satisfait le problème variationnel

$$
(\mathcal{P}^{eff}) : \begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in BD^{\nu,m}_0(\Omega), \\ \boldsymbol{u} \in BD^{\nu,m}_0(\Omega), \end{cases}
$$

équivalent à (7). On établit enfin la complétude de $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$ et la coercivité de $a(.,.)$ sur $BD_0^{\nu,m}(\Omega)$, ce qui achève la preuve du théorème.

## Remerciements

Les travaux de S.C. et M.B. ont été financés par l'Agence nationale de la recherche (ANR) (Projet « Blanc », ANR-13-BS03-0009-03). Ceux de S.C. ont été aussi supportés par l'"Engineering and Physical Sciences Research Council" (grant EP/M017281/1).

## Références

[1] G. Bouchitté, Représentation intégrale de fonctionnelles convexes sur un espace de mesures, Ann. Univ. Ferrara, Sez. 7 : Sci. Mat. 33 (1987) 113–156.
[2] G. Bouchitté, C. Picard, Singular perturbations and homogenization in stratified media, Appl. Anal. 61 (1996) 307–341.
[3] L.C. Evans, R.F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, 1992.
[4] J.E. Hutchinson, Second fundamental form for varifolds and the existence of surfaces minimising curvature, Indiana Univ. Math. J. 35 (1) (1986) 45–71.
[5] R. Temam, Problèmes mathématiques en plasticité, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
[6] V.V. Zhikov, On weighted Sobolev spaces, Mat. Sb. 189 (8) (1998) 27–58 (in Russian); translation in Sb. Math. 189 (7–8) (1998) 1139–1170.